Exercice :(7 pts)

I- soit dans le plan un triangle ABC quelconque et non isocèle.

D_1, D_2 et D_3 désignent les bissectrices intérieures respectives des secteurs angulaires.

[BC, BA], [AB, AC] et [CA, CB]. et I le point de concours des trois droites D_1, D_2 et D_3.

On pose $h= S_{D3} \circ S_{D2} \circ S_{D1}$

1°/Montrer que h (I) = I et que h ((BC)) = (BC)

2°/Soit Δ_1 la perpendiculaire à (BC) passant par I et J le projeté orthogonal de I sur (BC).

a) Monter que h laisse globalement invariante la droite Δ_1.

b) Monter que h (J) = J

c) Déduire alors la nature de h.

II- On suppose que le triangle ABC est isocèle en A.

Soit f une isométrie du plan vérifiant f (B) = C et f (C) = B.

1°/On suppose que f (A) = A ; montrer que dans ce cas f n'est autre qu'une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

2°/On suppose que f (A) = A' avec A' $\neq$ A.

a) Montrer que J = A * A'.

b) Soit $g = f \circ S_{(BC)}$.

Vérifier que g fixe les points J et A'. En déduire f.

3°/ Déterminer alors toutes les isométries du plan transformant B en C et C en B.

Problème : (13pts)

A/ soit la fonction f définie sur] - ∞ ,1 [par :

$$f(x)=\begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si } x<-1 \\ \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} & \text{si } -1\leq x<1. \end{cases}$$

1°/ Etudier la continuité de f sur I=]-∞ .1 [

2°/ Etudier la dérivabilité de f sur I déterminer sa fonction dérivé f '.

3°/a- Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b- Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1}, réciproque de f, sur J c)- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$, $\forall\ x \in$ .J.

4°/ construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C de f.

On précisera les demi- tangentes au point d'abscisse (-1).

5°/Soit $x \in$ IR, montrer que l'équation f(x) = -3x +2 admet dans IR une solution unique x_0 puis vérifier que $x_0 \in\ ]-2,1[$

6°/Soit C' la courbe représentative de f^{-1} selon le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a)Déterminer de deux manières une équation de la tangente à la courbe C' au point d'abscisse $(-\frac{1}{4})$.

b) construire C'.

B) soit la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f(\sin x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

1°/a) Etudier la dérivabilité de g sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer g' (x), $\forall x \in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

b)Montrer que g réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$

c)Monter que g^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

2°/ soit la fonction K définie sur $]0, +\infty[$ par : $K(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(\frac{1}{x})$.

a)Montrer que K est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b)En déduire l'expression de K (x) pour $x \in\ ]0, +\infty[$

C/ Soit U et V les suites définies sur IN par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}(\frac{1}{n+k})$

et $V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}(n+k)$

1°/ soit pour tout n. $\in$ IN*, $k \in \{0,1,......,n\}$

a) Montrer que : $g^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq g^{-1}(\frac{1}{n+k}) \leq g^{-1}(\frac{1}{n})$.

b) Montrer que : $g^{-1}(\frac{1}{2n}) \leq Un \leq g^{-1}(\frac{1}{n}), \nabla\ n \in$ IN*.

2°/a) Déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$